ВЕСТНИК

КОМИ НАУЧНОГО ЦЕНТРА УРАЛЬСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АН

ВЫП. 33

Сыктывкар
2018

ТРУДЫ МЕЖДУНАРОДНОГО СЕМИНАРА «ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ СИСТЕМ»

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Коми научный центр
Уральского отделения
Российской академии наук

*Научный сборник посвящен 45-летию
физико-математических исследований
в Коми НЦ УрО РАН*

ВЕСТНИК
Коми научного центра УрО РАН

Выпуск 33

Труды Международного семинара
«Теоретико-групповые методы исследования физических систем»
(21–23 сентября 2017 г., г. Сыктывкар)

Сыктывкар 2018

УДК 53:51:001.891.3(063)
Т33

Труды Международного семинара «Теоретико-групповые методы исследования физических систем». Сыктывкар, 2018. 186 с. (Вестник Коми НЦ УрО РАН; Вып. 33).

В данном специальном выпуске «Вестника Коми научного центра УрО РАН» представлены доклады Международного научного семинара «Теоретико-групповые методы исследования физических систем» (21–23 сентября 2017 г., г. Сыктывкар), отражающие результаты исследований по применению теоретико-групповых методов в физике, решению проблем и задач физики конденсирования сред, механики сплошных сред, теории вероятностей и ее приложений, построению математических моделей в экологических исследованиях, спектроскопии нано- и биоматериалов.

Научный сборник может представлять интерес для научных работников, аспирантов и студентов.

Печатается по решению Ученого совета Коми НЦ УрО РАН
от 29 марта 2018 г.

ISBN 978-5-89606-571-5

Содержание

Введение 5

Андрюкова В.Ю. Нелинейные колебания прямоугольных пластин 7

Веко О.В., Войнова Я.А., Редьков В.М. Частица со спином 1/2 и аномальным магнитным моментом: нерелятивистское приближение, учет кулоновского поля 13

Громов Н.А., Куратов В.В. Гармонический осциллятор на плоскостях Кэли-Клейна с римановой и вырожденной метриками 21

Ефимов Д.Б. Обобщенный определитель и перечисление ограниченных перестановок 37

Жубр А.В. Об одном обобщении операции "связной суммы" для многомерных узлов 41

Казаков Д.В. Влияние нарушений пространственно-периодической структуры на дифракцию рентгеновских лучей в сверхрешетках InAs/GaSb с латеральной модуляцией 53

Карпов А.В. Теория компланарной рентгеновской дифракции на кристалле с поверхностным рельефом 63

Авдейчиков В.В., Богданова Г.А., Борзунов Ю.Т., Волков В.Ю., Воробьев А.П., Гаврищук О.П., Головня С.Н., Дунин В.Б., Киреев В.И., Кокоулина Е.С., Кутов А.Я., Никитин В.А., Петухов Ю.П., Путырский М.Н., Руфанов И.А., Шуляковский Р.Г., Рядовиков В.Н., Тимошин С.И. Изучение адронных и ядерных взаимодействий в области большой множественности с образованием пионного конденсата 71

Кисель В.В., Овсиюк Е.М., Веко О.В., Редьков В.М. Фермион с внутренним спектром масс во внешних полях 81

Костяков И.В., Куратов В.В. Об одной контракции группы Пуассона-Ли 89

Лапина Л.Э. Пампинг-эффект в природных системах 95

Лапина Л.Э., Успенский И.М. Анализ данных по температуре воздуха по данным метеостанции города Сыктывкара в период с 1900 по 2015 г. 102

Лапина Л.Э., Успенский И.М. Динамика температурного режима почвы по данным метеостанции города Сыктывкара в период с 1970 по 2015 г. 108

Некипелов С.В., Мингалева А.Е., Петрова О.В., Пийр И.В., Сивков В.Н. Рентгеновские исследования титанатов висмута, допированных атомами $3d$-металлов 115

Пунегов В.И. Динамическая теория рентгеновской дифракции на полупроводниковом кристалле с металлической поверхностной решеткой 119

Сивков В.Н., Петрова О.В., Мингалева А.Е., Некипелов С.В. Применение метода полного электронного выхода для измерения сечений поглощения в области NEXAFS $C1s$ – порога ионизации 126

Сивков Д.В. Применение генетического алгоритма для решения обратной задачи рентгеновской дифракции 131

Ткаль В.А., Бушуев В.А., Жуковская И.А., Бабаев А.А. Роль фазового и амплитудного спектров при реконструкции изображений дефектов структуры с помощью дискретного Фурье-анализа 135

Ткаль В.А., Жуковская И.А., Бабаев А.А. Вейвлет-анализ экспериментальных топографических и поляризационно-оптических изображений дефектов структуры монокристаллов 141

Ткаль В.А., Жуковская И.А., Бабаев А.А. Диагностика качества веществ различной физико-химической природы и выявление фальсифицированной продукции по цветовым характеристикам 148

Ткаль В.А., Жуковская И.А., Бабаев А.А. Качественный и количественный анализ топографических и поляризационно-оптических изображений дефектов структуры монокристаллов . . . 162

Толкачев Е.А. Дуально инвариантная формулировка уравнений для бессиловых электромагнитных полей 166

Турьев А.В.,Полещиков С.М.,Асадуллин Ф.Ф. Ангармонический двухъямный потенциал несимметричной формы 170

Mingaleva A.E., Petrova O.V., Nekipelov S.V., Obiedkov A.M., Kaverin B.S., Sivkov V.N. NEXAFS study of composite MWCNT/(pyrolytic metal) 174

Пампинг-эффект в природных системах

Лапина Л.Э.

Физико-математический институт Коми НЦ УрО РАН,
ул. Коммунистическая, 24, г. Сыктывкар, 167982, Россия
e-mail: lapina@dm.komisc.ru

«... Природа представляет собой реализацию
простейших математических элементов»
Эйнштейн А. [1.С. 217; 2]

«Мы должны стремиться давать не просто описание
явлений, а наиболее простое из возможных описаний»
Моисеев Н.Н. [3]

Введение

Пампинг-эффект играет роль значимого нелинейного механизма перераспределения потоков тепла (и не только) на Земле [4]. Начало исследованиям остаточных нелинейных эффектов в периодических задачах для параболических уравнений положено в работе Филипа [5]. Пампинг-эффект впервые в России, по-видимому, был обнаружен при изучении динамики приливных волн в устье р.Онеги в конце 80-х гг. прошлого столетия и тогда носил название нелинейной приливной накачки [6–9]. Встречается во многих задачах, в частности:

- распространение приливных волн на мелководье (приводит к повышению среднего уровня воды, что дает дополнительный остаточный перенос консервативной примеси в устьевых областях рек)[10];
- интрузия морских вод в устья рек и подземные горизонты в приливных морях [11];
- распространение температурных волн во льдах, ледниках, многолетней мерзлоте [4].

Иначе говоря, пампинг-эффект возникает в таких краевых задачах для нелинейного параболического уравнения типа уравнения теплопроводности с периодическими граничными условиями. Суть этого эффекта заключается в том, что чисто гармоническое колебание изучаемой характеристики среды на границе области приводит к увеличению или уменьшению ее значения внутри области относительно ее среднего значения на границе. Эффект проявляется в виде накачки либо, наоборот, откачки субстанции на бесконечности гармоническими колебаниями на границе.

1. Теория

Многие физические процессы в природе описываются нелинейными параболическими уравнениями типа уравнения теплопроводности с коэффициентом, являющимся функцией изучаемой характеристики среды. Хотя этот класс уравнений называется уравнением теплопроводности, он встречается при описании совершенно разных процессов. Общая форма этих уравнений имеет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = bdiv[F(T)gradT], \tag{1}$$

где b – константа, t – время, $F(T)$ – функция среды, имеющая различные зависимости для разного класса задач. Наиболее часто $F(T)$ описывается степенной функцией $F(T) = T^n$. Например, при $n = 1$ уравнение (1) описывает динамику безнапорной фильтрации в пористых средах [12], T в этом случае является уровнем грунтовых вод; при $n \geq 1$ – фильтрацию политропного газа в пористых средах [13], давление P и плотность ρ которых связаны уравнением

$P = const\rho^n$ (n – показатель политропы). В этом случае T – плотность газа ρ. При $n = 3$ – динамика тонкого слоя жидкости, стекающего под действием силы тяжести [14], эволюция длинных гравитационных волн типа приливных на мелководье [6,15].

Рассмотрим одномерный аналог уравнения (1) на полупрямой $z > 0$, т.е. уравнение вида:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left[F(T)\frac{\partial T}{\partial z}\right] \tag{2}$$

со следующими граничными условиями

$$T|_{z=0} = f(t), \quad T|_{z\to\infty} < C < \infty, \tag{3}$$

где $f(t)$ – периодическая функция с периодом τ. Обычно имеет вид:

$$f(t) = T_0 + T_1\cos(\omega t), \text{где} \quad \omega = \frac{2\pi}{\tau}. \tag{4}$$

Тогда справедлива основная теорема, приведенная в работе [16]:

Теорема. Периодическое решение уравнения (2) с граничными условиями (3) стремится при $z \to \infty$ к константе $T^{(\infty)}$, которая определяется из соотношения

$$\Psi(T^{(\infty)}) = \langle\Psi(f(t))\rangle, \tag{5}$$

где

$$\Psi(t) = \int F(t)dT, \quad \langle T\rangle = \frac{1}{\tau}\int_t^{t+\tau} Tdt. \tag{6}$$

На основе этой теоремы и находится константа $T^{(\infty)}$. Она в общем случае не равна T_0.

Разность $T^{(\pm)} = T^{(\infty)} - T_0$ дает величину пампинг-эффекта. Знак $(\pm)$ означает, что эта величина может быть как положительной, так и отрицательной. В линейном случае никакого пампинг-эффекта нет.

Если функция среды F(T) в уравнении (2) есть линейная функция $F(T) = \alpha + \beta T$, где $\alpha = F(T_0)$, $\beta = \frac{dF(T_0)}{dT}$, то в работе [4] получено выражение для пампинг-эффекта на бесконечности в виде следующей формулы:

$$T^{(\infty)} = -b \pm \sqrt{b^2 + T_1^2/2}, \quad b = \frac{\alpha}{\beta} + T_0. \tag{7}$$

Если $b < 0$, то необходимо брать минус перед корнем, если $b > 0$ – знак плюс.

При $T_1/b << 1$ и $\alpha/\beta >> T_0$ это соотношение упрощается и сводится к формуле:

$$T^{(\infty)} = \frac{\beta T_1^2}{4\alpha}. \tag{8}$$

В работе [4] приводится такой вывод: пампинг-эффект будет положительным, если $F(T)$ в уравнении (2) – возрастающая функция, и отрицательным, если она – убывающая. Отсюда возникает проблема оценки этой функции от изучаемой характеристики среды. Для задач, связанных с изучением распространения температурных волн в пористых средах, функция $F(T)$ описывает зависимость коэффициента температуропроводности от температуры. Поэтому очень важно по имеющимся натурным наблюдениям и опубликованным результатам лабораторных испытаний (например, [17]) с достаточной точностью определить ее. Это отдельная задача, здесь она не рассматривается.

2. Эволюция приливной волны на мелководье и пампинг-эффект

Эволюция приливной волны периода τ, когда она выходит на мелководье с глубиной h, не превышающей толщину слоя Стокса $h_{st} = \sqrt{K_z \tau}$ (K_z – кинематический коэффициент вертикального турбулентного обмена, τ – характерный временной масштаб движений (период волны)), описывается нелинейным параболическим уравнением ( ) для отклонения уровня ς:

$$\frac{d\varsigma}{dt} = \frac{g}{3K_z}\nabla[(h+\varsigma)^3\nabla\varsigma], \tag{9}$$

где $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ – оператор Гамильтона, g – ускорение свободного падения. Одномерный аналог уравнения будет иметь вид уравнения (2) с $F(\varsigma) = \frac{9}{3K_z}(h+\varsigma)^3$.

Движение рассматривается в вертикальной плоскости, перпендикулярной к берегу. Колебания уровня на внешней глубоководной границе мелководной зоны определяются приходящей приливной волной $\varsigma = \varsigma_0 \sin \omega t$, $\omega = 2\pi/\tau$. Величина пампинг-эффекта для приливных волн будет положительной, т.е. уровень увеличивается на мелководье под действием прилива. В случае малости отношения амплитуды приходящей волны прилива ς_0 к глубине h (т.е. при $\epsilon = \varsigma_0/h << 1$) формула оценки пампинг-эффекта имеет вид:

$$\varsigma^\infty \approx \frac{3}{4}\frac{\varsigma_0}{h}.$$

Более сложный вид выражения представлен в работе [4].

В статье [18. С.14., рис.6] показаны распределение солености и температуры в Двинском заливе на горизонте 2 м, а в работе [19. С.26., рис.1] – распределения кислорода, кремния, фосфора, аммонийного, нитритного и нитратного азота, органических фосфора и азота по всему Белому морю. Исходя из указанных рисунков видно, что для температуры, солености, а также таких элементов, как кремний, фосфор, аммонийный и нитритный азот, органические фосфор и азот, существует перенос не только вправо, обусловленный силой Кориолиса, но и влево. Следовательно, есть дополнительные механизмы переноса веществ в устьевых областях рек. Одним из возможных механизмов является пампинг-эффект, благодаря которому возникает дополнительный поперечный градиент давления, что обуславливает перенос веществ влево от направления основного течения распресненных речных вод. Исследования Ю.В. Лупачева [20] показали, что в Онежском заливе наличествует устойчивый остаточный перенос вод и основная причина его существования – эффект приливной накачки уровня. Расчеты нелинейной приливной накачки уровня, проведенные в статье [10] для мелководной части Двинского залива, показали, что по направлению впадения вод р.Северной Двины в залив проявляется перекос осредненного за период прилива уровня, причем средний уровень выше у восточной части устьевой зоны. Такой градиент, естественно, будет способствовать распространению речных вод влево от направления впадения, т.е. в противоположную сторону от действия силы Кориолиса. По-видимому, это может объяснять ряд явлений, описанных в статьях [18,19].

3. Случай, когда F(T) – полином второй степени

Разберем, как найти параметр $T^{(\infty)}$ в случае, когда $F(T)$ выступает в качестве полинома второй степени. Представим $F(T)$ в следующем виде

$$F(T) = C_1 + C_2 T + C_3 T^2.$$

Константы C_1, C_2, C_3 определяются методом наименьших квадратов по рассчитанным, например, коэффициентам температуропроводности на различных глубинах и, соответственно, различным температурам почв. По данным, приведенным в работе [17], можно получить аналитическую формулу, описывающую зависимость эффективного коэффициента температуропроводности (или функцию $F(T)$) от температуры при отрицательных значениях для суглинка с влажностью $w = 20$ д.е.

$$F(T) = aT^2 + bT + c, \quad a = -2.66e-5; \quad b = -3.73e-4; \quad c = 0.0013.$$

При этом $F(T)$ измеряется в м^2/час.

Исходя из вышеприведенной теоремы, имеем

$$\Psi(T) = C_1T + \frac{C_2}{2}T^2 + \frac{C_3}{3}T^3.$$

Для определения значения температуры $T^{(\infty)}$ нужно решить следующее уравнение

$$\Psi(T^{(\infty)}) = \langle\Psi(f(t))\rangle. \tag{10}$$

Левая часть (10) понятна

$$\Psi(T^{(\infty)}) = C_1T^{(\infty)} + \frac{C_2}{2}T^{(\infty)2} + \frac{C_3}{3}T^{(\infty)3}. \tag{11}$$

Функцию $f(t)$представим в виде

$$f(t) = T_0 + A\sin(\omega t + \varphi), \tag{12}$$

где T_0 – средняя температура (среднесуточная или среднегодовая на поверхности почвы) за период колебаний, A – амплитуда колебаний (суточных или годовых).

Вычислим правую часть формулы (10). Подставляя (12), раскрывая все скобки и учитывая тригонометрические формулы для квадрата и куба синуса, приводя подобные слагаемые, получаем:

$$\Psi(f(t)) = C_1T_0 + \frac{C_2}{2}T_0^2 + \frac{C_3}{3}T_0^3 + \sin(\omega t + \varphi)[A(C_1 + C_2T_0 + C_3T_0^2) + C_3A^3]-$$

$$-\sin(3(\omega t + \varphi))\frac{A^3}{4}\frac{C_3}{3} + \frac{A^2}{2}\left(\frac{C_2}{2} + C_3T_0\right) - \cos(2(\omega t + \varphi))\left(\frac{A^2}{2}\left(\frac{C_2}{2} + C_3T_0\right)\right). \tag{13}$$

При осреднении по периоду все слагаемые с тригонометрическими функциями будут равны нулю и остаются лишь постоянные. Таким образом,

$$\langle\Psi(f(t))\rangle = C_1T_0 + \frac{C_2}{2}T_0^2 + \frac{C_3}{3}T_0^3 + \frac{A^2}{2}\left(\frac{C_2}{2} + C_3T_0\right). \tag{14}$$

Если амплитуда колебаний равна нулю (а для масштаба суток такие ситуации в зимнее время нередки), то получается следующее уравнение:

$$C_1T^{(\infty)} + \frac{C_2}{2}T^{(\infty)2} + \frac{C_3}{3}T^{(\infty)3} = C_1T_0 + \frac{C_2}{2}T_0^2 + \frac{C_3}{3}T_0^3. \tag{15}$$

Одно частное решение понятно $T^{(\infty)} = T_0$, и в этом случае пампинг-эффекта нет. Но возможны и другие частные действительные решения.

Выражение (15) можно переписать в следующем виде:

$$(T^{\infty} - T_0)\left[C_1 + \frac{C_2}{2}(T^{\infty} + T_0) + \frac{C_3}{3}(T^{\infty 2} + T_0T^{\infty} + T_0^2)\right] = 0.$$

Необходимо решить еще квадратное уравнение, которое в данном случае имеет вид:

$$\frac{C_3}{3}T^{\infty^2} + \left(\frac{C_2}{2} + \frac{C_3}{3}T_0\right)T^{\infty} + C_1 + \frac{C_2}{2}T_0 + \frac{C_3}{3}T_0^2 = 0.$$

Дискриминант этого уравнения следующий:

$$D = \frac{C_2^2}{4} - 4\frac{C_1C_3}{3} - \frac{1}{3}C_3C_2T_0 - 3\frac{C_3^2}{9}T_0^2.$$

Если $D > 0$, то существуют еще два действительных корня уравнения (15). Посчитаем дискриминант для суглинка с влажностью 20 д.е. Поскольку в выражение для дискриминанта входит T_0, то при расчетах оказалось, что при $T_0 \geq 6$ и $T_0 \leq 8$ дискриминант становится положительным. Пусть $T_0 = 7$. Тогда возможны два корня $T_1^{\infty} = 7.94$ и $T_2^{\infty} = 6.09$. Этот результат получен при отсутствии колебаний, что встречается, как правило, при отрицательных температурах. Кроме того, и сами параметры функции $F(T)$ были найдены лишь при аппроксимации лабораторных испытаний, проведенных при отрицательных температурах [7], поэтому этот результат лишь показывает возможность существования других действительных корней. Далее требуются дополнительные исследования в реальных условиях. Если амплитуда колебаний не равна нулю, то очевидно, что пампинг-эффект существует, и уравнение примет вид:

$$C_1T^{(\infty)} + \frac{C_2}{2}T^{(\infty)2} + \frac{C_3}{3}T^{(\infty)3} - \left(C_1T_0 + \frac{C_2}{2}T_0^2 + \frac{C_3}{3}T_0^3 + \frac{A^2}{2}\left(\frac{C_2}{2} + C_3T_0\right)\right) = 0. \qquad (16)$$

Уравнение (16) является кубическим, а, как известно [21], кубическое уравнение в некоторых случаях может иметь три действительных корня. Для этого необходимо выполнение следующих условий:$Q < 0$, $p < 0$, где

$$Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2, \quad p = -\frac{9}{12}\left(\frac{C_2}{C_3}\right)^2 + \frac{3C_1}{C_3}, \qquad (17)$$

$$q = 2\left(\frac{C_2}{2C_3}\right)^3 - \frac{3}{2}\frac{C_2C_1}{C_3^2} - \left(\frac{3C_1}{C_3}T_0 + \frac{3C_2}{2C_3}T_0^2 + T_0^3\right) - \frac{3A^2}{2C_3}\left(\frac{C_2}{2} + C_3T_0\right). \qquad (18)$$

Здесь используются обозначения, введенные при рассмотрении $F(T)$, T_0 – осредненная за период колебаний τ температура поверхности почвы, A – амплитуда колебаний за этот же период времени. Для ранее рассмотренных параметров суглинка параметр p отрицателен. Для того, чтобы Q было отрицательно при отрицательном значении p, достаточно, чтобы выполнялось неравенство $\left(\frac{q}{2}\right)^2 < -\left(\frac{p}{3}\right)^3$. Ввиду громоздкости вычислений q^2, расчеты были проведены численно. Заметим, что выражение (18) для q зависит не только от параметров функции $F(T)$, но и от значения средней температуры T_0 и амплитуды колебаний A. Расчеты для $T_0 = 0$ и $A = 0$ показали, что значение параметра Q также отрицательно и существует три действительных корня, одно из которых совпадает с T_0. Корни находились по формулам тригонометрического решения кубического уравнения [21].

Заключение

Если процесс описывается нелинейным параболическим уравнением типа уравнения теплопроводности с коэффициентом, являющимся функцией изучаемой характеристики среды и периодическим граничным условием на поверхности, то в таком процессе существует пампинг-эффект. Знак этого эффекта зависит от свойств коэффициента. Если коэффициент – убывающая функция, то эффект отрицателен, если возрастающая, то – положителен. В частности, для эволюции приливных волн этот эффект положителен, что выражается в повышении среднего уровня воды. Мелководные части устьевых областей приливных рек могут приводить к возникновению дополнительного поперечного (относительно основного направления движения пресных вод) уклона свободной поверхности, что, в свою очередь, ведет к остаточному течению и переносу консервативной примеси, что наблюдается в реальных географических объектах [18,19]. Подробно рассмотрен случай, когда коэффициент описывается полиномом второй степени. Представлено, что в некоторых случаях возможно существование трех вещественных корней. Также показано, что для такой функции температуропроводности в узком диапазоне средних температур даже при отсутствии колебаний возможно существование значений температуры на большой глубине, отличных от среднего значения температуры.

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных исследований УрО РАН, проект № 18-1-1-7.

Литература

1. Виноградов Ю.Б., Виноградова Т.А. Современные проблемы гидрологии. М., 2008. 320 с.
2. Эйнштейн А. Собрание научных трудов. М., 1967. Т.4.
3. Моисеев Н.Н. Математика ставит эксперимент. М., 1979.
4. Зырянов В.Н. Нелинейный пампинг-эффект в колебательных процессах в геофизике // *Водные ресурсы*. 2013. Т.40. № 3. С.227–239.
5. Philip J.R. Periodic nonlinear diffusion: an integral relation and its physical consequences // *Australian J. Phys.* 1973. V.26. P.513–519.
6. Зырянов В.Н., Музылев С.В. Нелинейная накачка уровня приливами на мелководье // *Доклады АН СССР*. 1988. Т.298. № 2. С.454–458.
7. Зырянов В.Н., Лейбо А.Б. Эволюция приливной волны в устье реки с ледяным покровом // *Гидрофизические процессы в реках и водохранилищах*. М.: Наука, 1985. С.246–257.
8. Лупачев Ю.В. Повышение среднего уровня воды в устье реки под воздействием приливной волны // *Метеорология и гидрология*. 1986. № 6. С.105–107.
9. Лупачев Ю.В. Эффект результирующей приливной накачки в эстуариях // *Метеорология и гидрология*. 1989. № 9. С.78–82.
10. Лапина Л.Э. Динамика течений и особенности переноса консервативной примеси в устьевых областях приливных рек. Сыктывкар, 2001 (Коми НЦ УрО РАН).
11. Фомин Ю.В. Нелинейные эффекты интрузии морских вод в береговые подземные горизонты приливного моря: Дис... к.ф.-м.н. М., 2017. 96 с.
12. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. *М.: Наука*, 1977. 664 с.
13. Лейбензон Л.С. Подземная гидрогазодинамика // *Собрание трудов. М.: Изд-во АН СССР*, 1953. 544 с.
14. Buckmaster J. Viscous sheets advancing over dry beds// *J. Fluid. Mech.* 1977. V.81. P.735–756.
15. Le Blond P.H. On tida propagation in sha low rivers // *J.Geophys.Res.* 1978. V.83. P.4717–4721.
16. Зырянов В.Н., Хубларян М.Г. Пампинг-эффект в теории нелинейных процессов типа уравнения теплопроводности и его приложения в геофизике // *Доклады академии наук*. 2006. Т.408. № 4. С. 535–538.
17. Гаврильев Р.И., Кузьмин Г.П. Определение теплофизических характеристик мерзлых грунтов расчетным методом // *Наука и образование*. 2009. № 4. С. 51–54.
18. Солянкин Е.В., Зозуля С.А., Кровнин А.С., Масленников В.В. Термохалинная структура и динамика вод Белого моря летом 1991 г. // *Комплексные исследования экосистемы Белого моря* / Под ред. В. В. Сапожникова. М.: ВНИРО, 1994. С. 8–25.
19. Аржанова Н.В., Грузевич А.К., Сапожников В.В. Гидрохимические условия в Белом море летом 1991 // *Комплексные исследования экосистемы Белого моря* / Под ред. В. В. Сапожникова. М.: ВНИРО, 1994. С.25–52.

20. Лупачев Ю.В. О механизме циркуляции вод Онежского залива // *Тр. ГОИН*. 1986. Вып.179. С.27–31.
21. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. *М.: Наука*, 1977. 832 с.